

基于界面问题的浸入式虚拟元方法

马俊驰, 索宇洋

(辽宁师范大学 数学学院, 辽宁 大连 116029)

摘要:提出了一种浸入式虚拟元方法,该方法用来求解二维空间中二阶椭圆界面问题,克服了构造的空间无法同时满足协调性和跳跃条件的不足。其核心思想是将形状规则的非适配网格上的协调虚拟元空间进行离散化,并将其投影到界面单元上的浸入式有限元空间上,这些界面单元是由背景网格上的界面线切割而成的,使得所提出的方法继承了拟合和非拟合网格方法的优点。进一步给出此方法的严格理论推导和最优误差估计,最后进行数值算例求解。通过计算数值解与解析解误差的 L^2 和 H^1 范数,并通过误差的线性回归图,可以看出 L^2 和 H^1 范数分别以 $O(h^2)$ 和 $O(h)$ 速率收敛,表明理论分析结果是正确的。

关键词:椭圆界面问题;虚拟元方法;浸入式有限元方法;最优误差估计

DOI:10.15938/j.jhust.2023.06.017

中图分类号: O242.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2023)06-0145-08

An Immersed Virtual Element Method Based on Interface Problems

MA Junchi, SUO Yuyang

(School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

Abstract: An immersed virtual element method is developed to solve the second-order interface problems in two-dimensional space, which overcomes the problem that the constructed space cannot satisfy both the coordination and jump conditions. The key idea is to use the conforming virtual element spaces on a shape regular background unfitted mesh for discretization, and project them to the immersed finite element spaces on interface elements which are cut by the interfaces from the background mesh, making the proposed method combine the advantages of both body-fitted mesh methods and unfitted mesh methods. Then the strict theoretical derivation and optimal error estimation of the method are given. Finally, the numerical example is solved. By calculating the L^2 and H^1 norms of the numerical solution and analytical solution, and making the linear regression diagram of errors, the method achieves second order convergence in the L^2 norm and first order convergence in the H^1 norm, indicating that the theoretical analysis results are correct.

Keywords: elliptic interface problem; virtual element method; immersed finite element method; optimal error estimates

0 引言

近年来,随着新结构材料的出现,大量的实际问题可由具有间断系数的二阶椭圆方程表示,如材料科学中具有不同密度的材料所构成的复合材料问题^[1];在渗透力学中,复杂地质结构或多相流体导

致具有间断渗透率或扩散系数的溶混驱动问题^[2]等。这类由间断系数所导致的解析解在间断面上出现跳跃的现象,我们称之为界面问题,间断面称之为界面。界面问题在工程计算中的应用很多,包括流体力学中 Navier-Stokes 方程问题^[3],电磁学中航空航天工程的空间带电问题^[4],形状或结构拓扑优化设计问题中线弹性结构的形状优化^[5-6]和热传导问

收稿日期: 2022-07-03

基金项目: 中国博士后科学基金面上项目(2020M680924);国家自然科学基金青年项目(12001256)。

作者简介: 索宇洋(1996—),男,硕士研究生。

通信作者: 马俊驰(1987—),女,博士,讲师,硕士研究生导师,E-mail: majch@lnu.edu.cn.

题的拓扑优化问题^[7],以及本文将要研究的具有不同密度的材料所构成的复合材料问题等。

目前,求解界面问题较为有效的有限元方法主要分为两类,一类是浸入式有限元方法(immersed finite element method, 简称 IFEM),该方法采取仅在界面附近修改网格,构造特殊的有限元函数,然后应用连续或不连续伽辽金公式求解方程,但由于修改仅在界面附近局部进行,因此通常无法实现形状规则性。第二类为界面拟合有限元方法,该类方法根据文[8]提出的贴体适配性原则可以生成一个适合界面,形状规则且能达到最佳精度的网格用于解决界面问题,然而生成这样的网格是非常耗时的,因为它一般需要进行某些全局修改,所以对于复杂的几何体,移动界面问题或三维界面解决起来将更加困难。

为了解决现有方法的计算空间不能同时满足协调条件与跳跃边界条件的问题,本文提出了一种基于 IFEM 的浸入式虚拟元方法(immersed virtual element method, 简称 IVEM),该方法在处理复杂边界问题时具有较大优势,其核心思想是将形状规则的非适配网格 τ_h 上的协调虚拟元空间进行离散化,并将其投影到界面单元上的 IFE 空间上,这些界面单元是由背景网格上的界面线切割而成的,因此既可以利用虚拟元空间提供的一致性优势,又可以利用 IFE 空间强大的逼近能力,使得所提出的方法继承了拟合和非拟合网格方法的优点。

本文第1节给出 IVEM 在界面问题方程中的理论推导。第2节给出了数值算例,通过数值计算结果证明了理论分析的正确性。第3节对本文所做的工作进行总结。

1 二维界面问题的浸入虚拟元方法

1.1 预备知识

本文讨论的空间依照 Sobolev 空间的规范和通常表示法。特别地,对于开的有界域 D ,用 $|\cdot|_{k,D}$ 和 $\|\cdot\|_{k,D}$ 分别表示希尔伯特空间 $H^k(D)$ 的半范数和范数,用 $(\cdot, \cdot)_{0,D}$ 表示 $L^2(D)$ 内积。当 D 是计算域 Ω 时,在不产生混淆的前提下,下标可省略。对于非负整数 k , $P_k(D)$ 表示域 D 上次数不超过 k 的多项式空间。

本文考虑由两种不同材料系数制成的复合材料问题,设其平面区域为 Ω ,该区域中的两种材料被一条闭合的平滑曲线 Γ 隔开,如图1所示, $\overline{\Omega} =$

$\Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Gamma$ 。设系数 β 是 Ω 上的分段线性常函数

$$\beta(x, y) = \begin{cases} \beta^+, & (x, y) \in \Omega^+ \\ \beta^-, & (x, y) \in \Omega^- \end{cases}$$

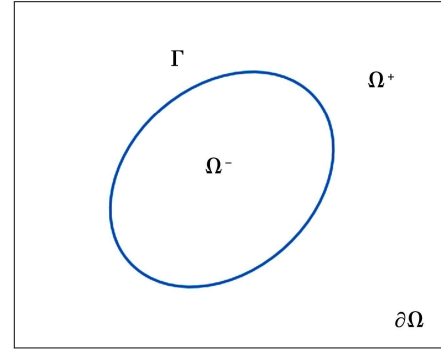


图1 界面问题的区域示意图

Fig. 1 The regional diagram of the interface problem

考虑 H^1 型椭圆界面问题如下

$$\begin{cases} -\nabla(\beta \nabla u) = f, & u \in \Omega \\ u = 0, & u \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

其中 $f \in L^2(\Omega)$, 并且真解满足如下连续性和跳跃条件

$$u^+ = u^-, \beta^+ \nabla u^+ \cdot \mathbf{n}^+ = \beta^- \nabla u^- \cdot \mathbf{n}^-, u \in \Gamma \quad (2)$$

其中 $\mathbf{n}^\pm$ 分别表示界面外区域 Ω^+ 和界面内区域 Ω^- 在界面线 Γ 上的单位外法向量; $u^\pm$ 表示在界面线 Γ 上任取一点 x , $u^\pm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(x - \varepsilon \mathbf{n}^\pm)$ 。接下来将问题

(1) 表示成双线性形式,即找到一个 $u \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$a(u, v) := (\beta \nabla u, \nabla v) = (f, v), v \in H_0^1(\Omega) \quad (3)$$

其中 $(\cdot, \cdot)$ 表示区域 Ω 上的 L^2 内积。由 Lax-Milgram 定理可知等式(3)中的解存在且唯一。

对于二维问题的网格剖分,可以将区域 Ω 划分成若干个二维单元,例如三角形单元,四边形单元或多边形单元。设 $\tau_h = \{K\}$ 是区域 Ω 上形状规则的剖分,若 $\text{meas}(K \cap \Omega^\pm) > 0$, 则称剖分 K 为界面剖分,否则称为非界面剖分。其中 $\text{meas}(\cdot)$ 表示区域的度量。设 h_K 为 τ_h 上所有单元最大的直径,对于界面 Γ 和剖分 τ_h 有如下假设:

- 1) $\Gamma \cap \partial K$ 由两个点构成,称切点;
- 2) 这两个切点不能在 K 的同一条边上;
- 3) 剖分 τ_h 是由有限数量的简单多边形构成的;
- 4) K 是相对于半径不小于 rh_K 的球的每一点都是星型的;
- 5) K 的最短边与最大直径 h_K 之比大于 r 。

以上假设可以使剖分集变得足够普遍,包括由任意(但一致有界)边数组成的多边形,这些多边形也可能是非凸的。其次,还需要注意,由于随着单元的不断减小数值解会有更好的收敛性,但是单元太小会导致未知量增加很多,从而对计算机的内存需求很大,故需要很长的计算时间。因此,在满足精度要求下,尽量减少剖分网格的数量。最后,通过对图2中(a)的部分区域网格剖分图观察研究,定义一个标准的界面单元 K_m ,它的3个顶点分别为 A_1, A_2, A_3 ,点 E 和 F 之间的曲线是界面线,我们用 $\overline{EF}$ 表示两点间的线段,它将 K_m 分为 K^+ 和 K^- ,即 $K_m = K^+ \cup \overline{EF} \cup K^-$,它的几何形状如图2中(b)所示。由于界面 Γ 是一条 C^2 —光滑的曲线,用线段 $\overline{EF}$ 去逼近界面 $\Gamma \cap K$ 所产生的误差为 $O(h^2)$ 。

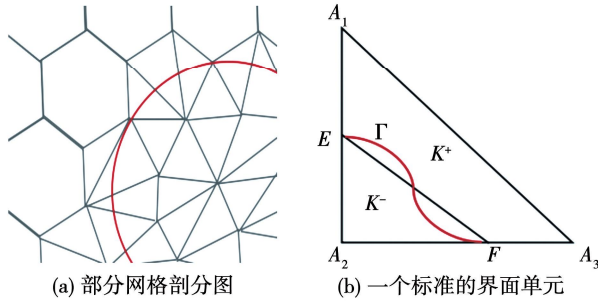


图2 网格剖分图及标准界面单元

Fig. 2 The grid division diagram and a standard interface unit

1.2 虚拟元空间

对于一个给定的单元 K ,定义局部虚拟元空间为

$$V_h(K) := \left\{ u_h : \nabla(\beta_h \nabla u_h) = f, u_h|_e \in P^1(e), \right. \\ \left. e \in \mathcal{E}_K, [u]_{\Gamma_h^K} = 0, [\beta_h \nabla u_h \cdot \mathbf{n}]_{\Gamma_h^K} = 0 \right\}$$

其中: u 满足跳跃条件; Γ_h^K 为剖分单元被曲线 Γ 切割所成线段,且有 $V_h(K) \subseteq H^1(K)$ 。该空间可以理解为文[9]中常见的线性虚拟元空间对不连续系数情况的推广,然后定义一个符合一致性的 H^1 型全局虚拟元空间为

$$V_h = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : u|_K \in V_h(K), K \in \tau_h^i; \right. \\ \left. u|_K \in P^1(K), K \in \tau_h^a \right\}$$

传统的虚拟元方法是将虚拟元空间投影到标准线性多项式空间 $P_k(\Omega)$,但是 $P_k(\Omega)$ 空间不满足式

(2)的跳跃条件,然而线性IFE空间是由满足 Γ_h^K 上跳跃条件的分段线性多项式组成,因此可以将线性IFE空间作为虚拟元空间的投影空间去计算问题(1)。

进一步,引入虚拟元空间的自由度

函数 u_h 在单元 K 的顶点上的值。

$$k > 1, u_h \text{ 在每条边上的值为 } \frac{1}{|e|} \int_e m_\alpha u_h ds.$$

$$k > 1, u_h \text{ 在单元 } K \text{ 上的值为 } \frac{1}{|K|} \int_K m_\alpha u_h dx.$$

其中: $\alpha = 1, \dots, n_{k-2}; n_{k-2} = \dim P_k(\Omega) = \frac{k(k-1)}{2}$;

$m_\alpha \in M_K(K)$ 。

1.3 浸入式有限元空间

考虑定义在分段 Γ_h^K 上的近似跳跃条件

$$\nabla u^+ \cdot \vec{t} = \nabla u^- \cdot \vec{t}, \beta^+ \nabla u^+ \cdot \vec{n} = \beta^- \nabla u^- \cdot \vec{n} \quad (4)$$

其中 $\vec{t}$ 和 $\vec{n}$ 分别是到 Γ_h^K 上的单位切向量和单位外法向量。

对于一个给定的单元,定义局部浸入式有限元空间为

$$V_h^{IFE}(K) := \left\{ u_h|_{K^\pm} \in P_1(K^\pm), \nabla u_h^+ \cdot \vec{t} = \nabla u_h^- \cdot \vec{t}, \right. \\ \left. \beta^+ \nabla u_h^+ \cdot \vec{n} = \beta^- \nabla u_h^- \cdot \vec{n} \right\}$$

文[10-11]给出了拉格朗日型IFE形函数,并通过单元 K 顶点处的节点值证明IFE空间 $V_h^{IFE}(K)$ 有唯一解。

设 φ_z^{IFE} 是IFE空间的节点基函数, $\varphi_z^{IFE} \in V_h^{IFE}$,对任意 $x \in N(K)$,有 $\varphi_z^{IFE}(z) = 1, \varphi_z^{IFE}(x) = 0$ 。定义分段节点插值函数 $I_h^{IFE}(\cdot)$,对于任意 $v \in C^0(\Omega)$, $I_h^{IFE}v(x)|_K := \sum_{z \in N(K)} v(z) \varphi_z^{IFE}(x)$ 。接下来讨论插值函数误差估计,对于 $u \in H^2(\Omega^+ \cup \Omega^-) \cap H_0^1(\Omega)$ 满足等式(2)界面跳跃条件,故存在一个与切点位置无关的常数 C ,因此

$$\|u - I_h^{IFE}u\|_{L^2(\Omega)} + h \left(\sum_{T \in \tau_h} \|u - I_h^{IFE}u\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^2 \|u\|_{H^2}.$$

根据文[10],提出局部惩罚IFE方法的双线性形式,对于任意参数 $\varepsilon, \alpha > 0, \sigma_e^0 \geq 0$,

$$a_h^{IFE}(u_h, v_h) := (\beta_h \nabla u_h, \nabla v_h)_\Omega - \sum_{\varepsilon \Gamma} (\beta \nabla u_h \cdot n_e \{ [v_h] \} + \varepsilon \{ \beta \nabla v_h \cdot n_e \} [u_h]) + \sum_{\varepsilon \Gamma} \int_e \frac{\sigma_e^0}{|e|^a} [u_h] [v_h] \quad (5)$$

其中: ε_Γ 表示带切割点的所有边的集合; $[\cdot]$ 和 $\{\cdot\}$ 分别表示跳跃条件和平均值, 即

$$[v]_e := v|_{T_1} n_1 + v|_{T_2} n_2, \{v\}_e := \frac{v|_{T_1} + v|_{T_2}}{2},$$

式中 e 表示 T_1 和 T_2 的公共边。

综上所述, IFE 空间下等式(3)的离散化的双线性形式可以描述为, 找到一个 $u_h \in V_h^{IFE}$, 使得

$$a_h^{IFE}(u_h, v_h) = (f, v_h), v_h \in V_h^{IFE}(\Omega).$$

该形式下离散解的收敛性分析, 设 u 是式(3)的解, u_h 是等式(5)的解, 且 $u \in H^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, 有

$$\|u - u_h\| \lesssim h \|u\|_{H^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)}$$

其中 $\|\cdot\|_h$ 是由双线性形式(5)定义的范数。

因此, 局部惩罚 IFEM 的离散化双线性形式^[12]可表示为, 任取 $v \in V_h^{IFE}(\Omega)$, 找到一个 $u_h \in V_h^{IFE}$, 使得

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) := & (\beta \nabla u, \nabla v)_\Omega - \sum_{\varepsilon_\Gamma} \int_e (\{\beta \nabla u\} [v] + \\ & \{\beta \nabla v\} [u]) + \sum_{\varepsilon_\Gamma} \left(\frac{\gamma}{|e^\pm|} \int_{e^\pm} [u] [v] \right) + \\ & \sum_{\varepsilon_\Gamma} \left(\frac{\gamma}{|e^\pm|} \int_{e^\pm} [\nabla u] [\nabla v] \right) \end{aligned} \quad (6)$$

其中惩罚参数 $\gamma > 0$ 。设 u 为等式(3)的解, u_h 为等式(6)的解, $u \in H^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, 则该形式下离散解的收敛性为

$$\|u - u_h\| \lesssim h [\sqrt{\beta^-} (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega^-)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega^-)}) + \sqrt{\beta^+} (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega^+)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega^+)})]$$

其中 $\|\cdot\|_h$ 为由双线性形式(6)所定义的离散范数。

1.4 投影算子

对于本文所提出的浸入式虚拟元方法, 误差分析和计算都依赖于投影算子 $\Pi_K: H^1 \rightarrow V_h^{IFE}(K)$, $(\beta_h \nabla \Pi_K u_h, \nabla v_h)_K = (\beta_h \nabla u_h, \nabla v_h)_K, v_h \in V_h^{IFE}(K)$ 。且有 $\int_{\partial K} \beta_h^{1/2} (u_h - \Pi_K u_h) ds = 0$ 。该投影算子的建立与 VEM 中常用的投影算子类似, 唯一的区别就是该投影算子含有非光滑系数 β_h 。

为了计算投影算子, 只需找到 $V_h^{IFE}(K)$ 的梯度空间的一个基即可进行投影, 取 e_1 和 e_2 是 R^2 中任意两个线性独立的向量, M 是包含跳跃信息的矩阵, 其显式形式可以写成 $u_{h,i} \in \nabla V_h^{IFE}(K), u_{h,i}^- = e_i, u_{h,i}^+ \in K_h^-, u_{h,i}^+ = M e_i, u_{h,i}^+ \in K_h^+$ 。其中

$$M = \begin{bmatrix} n_2^2 + \rho n_1^2 & (\rho - 1) n_1 n_2 \\ (\rho - 1) n_1 n_2 & n_1^2 + \rho n_2^2 \end{bmatrix}$$

上述矩阵是根据跳跃条件(4)构造的, 其中 $\vec{n} = [n_1, n_2], \vec{t} = [t_1, t_2], \rho = \frac{\beta^-}{\beta^+}$ 。然后利用投影算子将

虚拟元空间 $V_h(K)$ 中的每个形函数通过这两个基函数投影到 IFE 空间, 这样做的优势便是在计算和误差分析方面避免了构造 IFE 形函数, 并且使 IVEM 实现起来更容易。最后, 为实现 Π_K 的每个多项式分量在整个单元 K 上的逼近, 所以我们需要使用文[12]中介绍的标准 IFE 插值算子。对于所有界面单元 K , 定义

$$\omega_K := \bigcup_{T \in \tau_h, K \cap \bar{T} \neq \emptyset} T$$

对于满足跳跃条件(2)的 $u \in H^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ 和其扩展 $u_K^\pm$, 我们定义 $\Pi_K^\nabla u_K^\pm$ 为 $u_K^\pm$ 到 $P_1(\omega_K)$ 的 L^2 投影算子, 设 Γ_h^K 的中点为 x_0 , $\vec{t}$ 和 $\vec{n}$ 仍分别是到 Γ_h^K 上的单位切向量和单位外法向量, 定义拟 IFE 插值算子 I_K^{IFE} , $I_K^{IFE, \pm} u$ 表示 $I_K^{IFE} u$ 的两个多项式分量, 并且适用于整个 ω_K 上, 则

$$I_K^{IFE, -} u(x_0) = I_K^{IFE, +} u(x_0) = \Pi_K^\nabla u_K^+(x_0),$$

$$\beta^- \nabla I_K^{IFE, -} u(x_0) \cdot \vec{n} = \beta^+ \nabla I_K^{IFE, +} u(x_0) \cdot \vec{n},$$

$$\nabla I_K^{IFE, -} u(x_0) \cdot \vec{t} = \nabla I_K^{IFE, +} u(x_0) \cdot \vec{t} = \nabla \Pi_K^\nabla u_K^+(x_0) \cdot \vec{t}。$$

对于满足跳跃条件(2)的 $u \in H^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, 拟 IFE 插值误差估计如下

$$\|u_K^\pm - I_K^{IFE, \pm} u\|_{1, \omega_K} \lesssim h_K (\|u_K^+\|_{2, D} + \|u_K^-\|_{2, D})$$

表明在整个 ω_K 上, 这两个多项式分量对其相应函数 $u_K^\pm$ 有理想的最佳逼近。在不引起混淆的情况下, 对于任何子域, 有 $\|u_K^\pm\|_{2, D} := \|u_K^+\|_{2, D} + \|u_K^-\|_{2, D}。$

1.5 浸入式虚拟元方法

该方法的思想是将背景网格上定义的虚拟元空间进行近似, 并将虚拟元函数投影到界面单元上的 IFE 空间, 因为上述过程满足跳跃条件, 所以在局部满足一定的近似条件, 因此我们定义界面单元 K 上的局部离散双线性形式为

$$\begin{aligned} a_h^K(u_h, v_h) := & (\beta_h \nabla \Pi_K u_h, \nabla \Pi_K v_h)_K + \\ & S_K(u_h - \Pi_K u_h, v_h - \Pi_K v_h) \end{aligned} \quad (7)$$

其中: $a_h^K(\cdot, \cdot): H^1(K) \times H^1(K) \rightarrow R; \Pi_K$ 为局部正交投影算子; $S_K(\cdot, \cdot)$ 为一个稳定项, 该项可以确保矫顽力, 即保持任意阶的近似性。可以使用每个单元边界上的 $\frac{1}{2}$ 半范数来定义稳定性 $S_K(\cdot, \cdot)$, 设 e 为

$K^\pm$ 上的一条边, 令 $Y = u_h - \Pi_K u_h, Z = v_h - \Pi_K v_h$, 则 $S_K(Y, Z) := \sum_{e \in \varepsilon_K} \beta_e (Y, Z)_{1/2, e}$

故

$$(Y, Z)_{1/2, e} := \int_e \int_e \beta_e \frac{(Y(x) - Y(y))(Z(x) - Z(y))}{|x - y|^2} dx dy.$$

该式几何意义为直线段上任意线性函数加权的切线导数的有向体积。由于 Y 和 Z 都是边 e 上的线性函数, 线段 e 的端点为 a_e 和 b_e , 因此, 稳定项的简化公式为

$$S_K(Y, Z) = \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \beta_e (Y(b_e) - Y(a_e))(Z(b_e) - Z(a_e))$$

对于非界面单元, Π_K 是虚拟元空间上的恒等式算子, 并且(7)式中的稳定项可以提出一项 $(I - \Pi_K)$, 所以稳定项将被消掉。因此, 非界面单元上的双线性形式简化为

$$a_h^K(u_h, v_h) := (\beta_h \nabla u_h, \nabla v_h)_K$$

此外, 选择合适的稳定项 $S_K(\cdot, \cdot)$ 的前提是使 $a_h^K(u_h, v_h)$ 满足以下条件

一致性: 任取 $u_h \in V_h(K), v_h \in V_h(K)$, 有 $a_h^K(u_h, v_h) = a^K(u_h, v_h)$;

稳定性: 任取 $v_h \in V_h(K)$, 存在正的常数 α_* 和 α^* , 有 $\alpha_* a^K(v_h, v_h) \leq a_h^K(v_h, v_h) \leq \alpha^* a^K(v_h, v_h)$ 。上述一致性的要求是为了满足工程问题中常用的预配置测试(patch test), 证明了当解是一个关于网格 τ_h 的分段线性多项式时, 该方法是有用的。另一方面, 如文[9]所证明的, 稳定性保证了离散双线性形式继承了原变分形式的连续性。

综上所述, 本文提出的浸入式虚拟元方法是找到一个 $u_h \in V_h$, 使得 $\forall v_h \in V_h$,

$$a_h(u_h, v_h) := \sum_{K \in \tau_h} a_h^K(u_h, v_h) = \sum_{K \in \tau_h} (f, \Pi_K v_h)_K \quad (8)$$

1.6 误差分析

本节给出方程离散形式的误差分析, 为了方便后面表示, 给出符号 $a \lesssim b$, 它表示 $a \leq Cb$, 其中 C 为独立的正常数, 参考文[11, 13, 14], 有以下近似结果。

定理 1 设 $u \in H^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, 满足跳跃条件(2), 令 $v_h = u_h - u_I$, $\|\cdot\|^2 := a_h(\cdot, \cdot)$, 有

$$\|v_h\|^2 = \sum_{K \in \tau_h} [(\beta_h \nabla \Pi_K(u - u_I), \nabla \Pi_K v_h)_K + (\beta_h \nabla(u - \Pi_K u) \cdot \mathbf{n}, v_h - \Pi_K v_h)_{\partial K} - S_K(u_I - \Pi_K u_I, v_h - \Pi_K v_h) + ((\beta - \beta_h) \nabla u, \nabla \Pi_K v_h)_K] \quad (9)$$

证明:

$$\|v_h\|^2 = a_h(v_h, v_h) = a_h(u_h - u_I, v_h) =$$

$$a_h(u_h, v_h) - a_h(u_I, v_h) =$$

$$\sum_{K \in \tau_h} a_h^K(u_h, v_h) - a_h(u_I, v_h) =$$

$$\sum_{K \in \tau_h} (f, \Pi_K v_h)_K - a_h(u_I, v_h) =$$

$$\sum_{K \in \tau_h} (-\nabla(\beta \nabla u), \Pi_K v_h)_K - a_h(u_I, v_h) =$$

$$\sum_{K \in \tau_h} [(\beta \nabla u, \nabla \Pi_K v_h)_K -$$

$$(\beta \nabla u \cdot \mathbf{n}, \Pi_K v_h)_{\partial K}] - a_h(u_I, v_h) \quad (10)$$

设(a) = $(\beta \nabla u, \nabla \Pi_K v_h)_K$, (b) = $(\beta \nabla u \cdot \mathbf{n}, \Pi_K v_h)_{\partial K}$, 在 ∂K 上有 $\beta = \beta_h$, 则

$$(a) = (\beta \nabla u, \nabla \Pi_K v_h)_K =$$

$$((\beta - \beta_h + \beta_h) \nabla u, \nabla \Pi_K v_h)_K =$$

$$(\beta_h \nabla u, \nabla \Pi_K v_h)_K + ((\beta - \beta_h) \nabla u, \nabla \Pi_K v_h)_K =$$

$$(\beta_h \nabla \Pi_K u, \nabla \Pi_K v_h)_K + ((\beta - \beta_h) \nabla u, \nabla \Pi_K v_h)_K$$

$$(b) = (\beta \nabla u \cdot \mathbf{n}, \Pi_K v_h)_{\partial K} = (\beta_h \nabla u \cdot \mathbf{n}, \Pi_K v_h)_{\partial K} =$$

$$(\beta_h \nabla u \cdot \mathbf{n}, \Pi_K v_h - v_h)_{\partial K}$$

由投影算子 Π_K 的定义, 以及分部积分可有

$$(\beta_h \nabla \Pi_K u \cdot \mathbf{n}, v_h - \Pi_K v_h)_{\partial K} =$$

$$\sum (\beta_h \nabla \Pi_K u \cdot \mathbf{n}, v_h - \Pi_K v_h)_{\partial K} =$$

$$\sum (\beta_h \nabla \Pi_K u \cdot \mathbf{n}, \nabla(v_h - \Pi_K v_h))_{K_h^\pm} = 0$$

因此, (b) = $(\beta_h \nabla(u - \Pi_K u) \cdot \mathbf{n}, v_h - \Pi_K v_h)_{\partial K}$ 。将变形后的(a)和(b)代入等式(10), 并将 $a_h(u_I, v_h)$ 按等式(7)展开, 可得等式(9)结论。

引理 1 (先验误差界) 设 $u \in H^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, 并且满足跳跃条件(2), 则由定理 1 易得下面估计成立

$$\|v_h\| \lesssim \sum_{K \in \tau_h} [\|\beta_h^{1/2} \nabla \Pi_K(u - u_I)\|_{0,K} +$$

$$\|\beta_{\max}^{1/2} \nabla u\|_{0,\delta K} + h_K^{1/2} \|\beta_h^{1/2} \nabla(u - \Pi_K u) \cdot \mathbf{n}\|_{0,\partial K} + |\beta_h^{1/2}(u_I - \Pi_K u_I)|_{1/2,\varepsilon_K}]$$

引理 2 设 $u \in H^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, 并且满足跳跃条件(2), 对于每一个界面单元 K , 有

$$\|\beta_h^{1/2} \nabla \Pi_K(u - u_I)\|_{0,K} \lesssim h_K \|u_K^\pm\|_{2,\omega_K}$$

引理 3 设 $u \in H^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, 并且满足跳跃条件(2), 对于每一个界面单元 K , 有

$$\|\beta_h^{1/2} \nabla(u - \Pi_K u) \cdot \mathbf{n}\|_{0,\partial K} \lesssim h_K^{1/2} \|u_K^\pm\|_{2,\omega_K} +$$

$$h_K^{-1/2} \|u_K^\pm\|_{1,\delta_K}$$

引理 4 设 $u \in H^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, 并且满足跳跃条件(2), 对于每一个界面单元 K , 有

$$\|\beta_h^{1/2}(u_I - \Pi_K u_I)\|_{1/2,\varepsilon_K} \lesssim h_K \|u_K^\pm\|_{2,\omega_K} + |u_K^\pm|_{2,\delta_K}$$

结合以上引理 1 ~ 4 的结果, 我们可以得到以下结论。

定理 2 设 $u \in H^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, 并且满足跳跃条件(2), u_h 为等式(8) 的解, 则有以下误差估计

$$\|u - u_h\| \leq h \|u\|_{2, \Omega^+ \cup \Omega^-} \quad (11)$$

证明: 首先由三角不等式可得

$$\|u - u_h\| \leq \|u - u_I\| + \|u_I - u_h\|.$$

结合引理 1 ~ 4 的结果, 首先估计 $\|u_I - u_h\|$

$$\begin{aligned} \|u_I - u_h\| &\leq \sum_{K \in \tau_h} h_K \|u\|_{2, K} + \sum_{K \in \tau_h} (h_K \|u_K^+\|_{2, \omega_K} + \|u_K^+\|_{1, \delta_K}) \leq h \|u\|_{2, \Omega} \\ &\leq h \|u\|_{2, \Omega^+ \cup \Omega^-} \end{aligned}$$

其中先验误差界中的 $\|\beta_{\max}^{1/2} \nabla u\|_{0, \delta_K}$ 可由文[15] 中庞加莱不等式得到估计, 并由文[16] 中介绍的界面上的迹不等式来估计 $h_K \|u_K^+\|_{2, \omega_K} + \|u_K^+\|_{1, \delta_K}$, 然后再由 ω_K 的有限重叠性质得到上述等式的估计。继续估计 $\|u - u_I\|$,

$$\begin{aligned} \|u - u_I\| &\leq \sum_{K \in \tau_h} \|\beta_h^{1/2} \nabla \Pi_K(u - u_I)\|_{0, K} + \|u - u_I\|_{1/2, \varepsilon_K} \end{aligned}$$

其中, 上式右边第一项可以由引理 2 得出估计, 对于第二项, 设 $e \in \varepsilon_K \in K_h^+$, $\hat{e}$ 是 e 的延拓, 通过插值估计和标准迹不等式可以得到

$$\|u - u_I\|_{1/2, \varepsilon} \leq h_e \|u\|_{3/2, \varepsilon} \leq h_e \|u_K^+\|_{3/2, \hat{e}} \leq h_K \|u_K^+\|_{2, K}$$

综上所述, 可以得到式(11) 的结果。

2 数值算例

本章我们将讨论上述浸入式虚拟元法的逼近能力。主要通过界面问题的数值结果来说明该方法的最优收敛阶, 希望获得与浸入式有限元法相同的逼近能力, 即 L^2 范数下的误差收敛阶数为 2, H^1 范数下的误差收敛阶数为 1。收敛阶计算公式如下

$$\text{order} = \log_2 \frac{\|u - u_{2N}\|}{\|u - u_N\|}$$

其中 u_N, u_{2N} 分别是在网格为 $N, 2N$ 下计算得出的。

下面通过两个数值算例来说明浸入式虚拟元方法处理界面问题的最优逼近能力。

例 1 考虑复合材料中的二维功能梯度连接型材料板, 即在平面区域为 $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ 上, 界面线 Γ 是一个半径 $r_0 = 0.5$ 的圆, 这条界面曲

线将该平面区域分成了 Ω^+ 和 Ω^- 两个子区域, $\Omega^+ = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq r_0^2\}$, $\Omega^- = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r_0^2\}$ 。设界面方程(1) 的精确解为

$$u(x) = \begin{cases} \frac{r^3}{\beta^-}, & (x, y) \in \Omega^- \\ \frac{r^3}{\beta^+} + \left(\frac{1}{\beta^-} - \frac{1}{\beta^+}\right)r_0^3, & (x, y) \in \Omega^+ \end{cases} \quad (12)$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $f = -9\sqrt{x^2 + y^2} = -9r$, 系数函数为

$$\beta(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega^- \\ 5, & (x, y) \in \Omega^+ \end{cases}$$

下面讨论了不同范数意义下的绝对误差。

$\text{error}(L^2) = \|u - u_h\|_{0, \Omega}$, $\text{error}(H^1) = \|u - u_h\|_{1, \Omega}$ 其中: u 为问题(1) 的精确解(即式(12)); u_h 为问题(1) 的数值解; $\text{error}(L^2)$ 代表 L^2 范数意义下的误差; $\text{error}(H^1)$ 代表 H^1 范数意义下的误差。

通过 MATLAB 软件计算可得误差估计和收敛阶如图 3 所示。

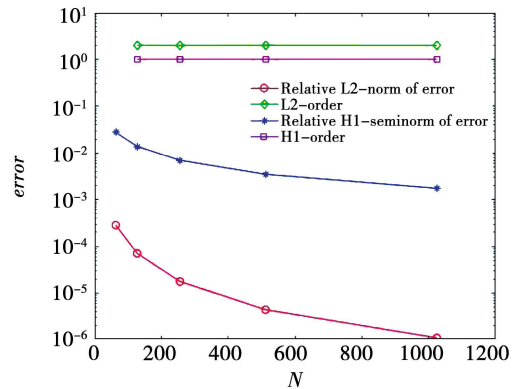


图 3 L^2 和 H^1 范数绝对误差与对应收敛阶随网格变化图

Fig. 3 The absolute errors of H^1 and L^2 norm and the corresponding convergence order vary with the grid

从图 3 可以看出, 随着网格数 N 以二倍的关系增加, 浸入式虚拟元方法数值解 u_h 和精确解 u 的 L^2 和 H^1 范数绝对误差估计均达到最优, 即

$$\|u - u_h\|_0 \approx O(h^2), \|u - u_h\|_{1, h} \approx O(h)$$

从而可以看出数值解 u_h 收敛于精确解 u 。

例 2 在平面 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ 上, 界面线 Γ 是一个半径 $r_0 = 0.25$ 的圆, 这条界面曲线将该平面区域分成了两个子区域。设界面方程(1) 的精确解为

$$u(x) = \begin{cases} \frac{r^3}{\beta^-}, & (x, y) \in \Omega^- \\ \frac{r^3}{\beta^+} + \left(\frac{1}{\beta^-} - \frac{1}{\beta^+}\right)r_0^3, & (x, y) \in \Omega^+ \end{cases}$$

其中 $f = -9\sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2} = -9r$,

$\Omega^+ = \{(x, y) \mid (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \geq r_0^2\}$,

$\Omega^- = \{(x, y) \mid (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 \leq r_0^2\}$,

$r = \sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}$, 系数函数为

$$\beta(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega^- \\ 2, & (x, y) \in \Omega^+ \end{cases}$$

通过 MATLAB 软件计算可得误差估计和收敛阶如图 4 所示。

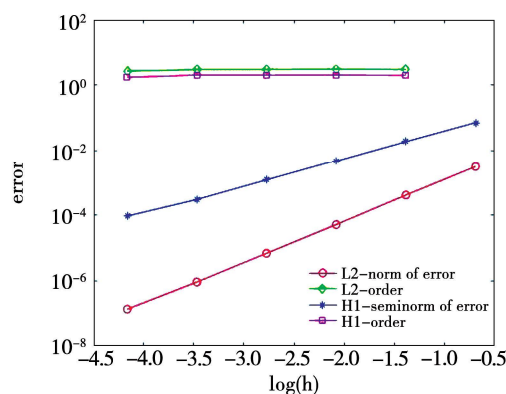


图 4 L^2 和 H^1 范数绝对误差与对应收敛阶随步长变化图

Fig. 4 The absolute errors of H^1 and L^2 norm and the corresponding convergence order vary with the step size

从图 4 可以看出,随着步长 h 以二倍的关系减少,浸入式虚拟元方法数值解 u_h 与精确解 u 的 L^2 和 H^1 范数绝对误差估计也可以达到最优。正如理论预测,IVEM 解在 H^1 范数下实现一阶收敛,在 L^2 范数下实现二阶收敛。

综上所述,我们首先选用两种不同密度系数的复合材料问题来验证前面所提出的新方法,然后通过改变界面的位置及大小,计算出数值结果并绘出不同范数意义下的绝对误差与网格和步长之间的关系图。通过这两个数值算例验证了数值结果与理论推导是一致的,并且该方法具有较强的鲁棒性,对界面与非界面元素之间的变化不敏感。最后,通过对比浸入式有限元方法处理椭圆界面问题^[10,17],发现数值解与解析解的 L^2 和 H^1 范数误差的线性回归图分别以 $O(h^2)$ 和 $O(h)$ 速率收敛,与本文结论一致,故验证了本文方法的正确性。

3 结 论

本文应用浸入式虚拟元方法求解二维空间中二阶椭圆界面问题。首先,该方法不仅保留了虚拟元方法的优点,即剖分区域选择的任意性和易于满足相应的一致性和稳定性条件,在计算过程中不需要给出具体的基底代入方程求解,而是借助自由度计算出未知系数,从而来逼近真解。而且还克服了浸入式有限元空间无法同时满足协调性和跳跃条件的不足。其次,传统的方法解决界面问题需要依赖于较好的网格剖分,但该方法不需要沿界面线进行精密的剖分,因此大大减少了计算量。再次,文章给出了浸入式虚拟元方法的严格理论推导,将形状规则的非适配网格上的协调虚拟元空间进行离散化,并将其投影到界面单元上的浸入有限元空间上,给出投影算子及稳定项,分析该方法的一致性与稳定性,进一步给出此方法的最优误差估计。最后,通过数值算例说明 IVEM 的数值解与解析解的误差范数能够达到最优收敛阶,并与 IFEM 进行对比分析,验证了本文方法的正确性。基于界面问题的浸入式虚拟元方法仍存在许多问题待解决,而高维高阶次浸入式虚拟元方法的构造与研究将是我们今后探究的课题。

参 考 文 献:

- [1] 陈涛,苗光,李素燕. 碳纤维复合材料切削加工技术研究进展[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2016, 21(2): 71. CHEN T, MIAO G, LI S Y. Review of the Machining Technology of Carbon Fiber Reinforced Composite[J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2016, 21(2): 71.
- [2] CLARK N J, SHEARIN H M, SCHULTZ W P, et al. Miscible Drive-Its Theory and Application[J]. Journal of Petroleum Technology, 1958, 10(6): 11.
- [3] CONSTANTIN P, FOIAS C. Navier-stokes Equations [M]. University of Chicago Press, 2020.
- [4] BUDD C J, FRIEDMAN A, MCLEOD B, et al. The Space Charge Problem[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1990, 50(1): 181.
- [5] BENDSØE M P. Optimization of Structural Topology, Shape, and Material[M]. Berlin: Springer, 1995.
- [6] 江旭东,刘铮,滕晓艳. 基于双向渐进结构优化方法的连续体结构刚度拓扑优化[J]. 哈尔滨理工大学学

- 报, 2020, 25(5): 136.
- JIANG X D, LIU Z, TENG X Y. Topological Optimization of Dynamic Stiffness in Continuum Structure Based on Bidirectional Evolutionary Structural Optimization [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2020, 25(5): 136.
- [7] GERSBORG-HANSEN A, BENDSØE M P, SIGMUND O. Topology Optimization of Heat Conduction Problems Using the Finite Volume Method [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2006, 31(4): 251.
- [8] LI J, MELENK J M, WOHLMUTH B, et al. Optimal a Priori Estimates for Higher Order Finite Elements for Elliptic Interface Problems [J]. Applied Numerical Mathematics, 2010, 60(1/2): 19.
- [9] BEIRÃO da Veiga L, BREZZI F, CANGIANI A, et al. Basic Principles of Virtual Element Methods [J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2013, 23(1): 199.
- [10] LIN T, LIN Y, ZHANG X. Partially Penalized Immersed Finite Element Methods for Elliptic Interface Problems [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2015, 53(2): 1121.
- [11] GUO R, LIN T, ZHUANG Q. Improved Error Estimation for the Partially Penalized Immersed Finite Element Methods for Elliptic Interface Problems [J]. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 2019, 16(4): 575.
- [12] GUZMÁN J, SÁNCHEZ M A, SARKIS M. A Finite Element Method for High-contrast Interface Problems with Error Estimates Independent of Contrast [J]. Journal of Scientific Computing, 2017, 73(1): 330.
- [13] HUANG J, ZOU J. Some New a Priori Estimates for Second-order Elliptic and Parabolic Interface Problems [J]. Journal of Differential Equations, 2002, 184(2): 570.
- [14] CAO S, CHEN L, GUO R. A Virtual Finite Element Method for Two-dimensional Maxwell Interface Problems with a Background Unfitted Mesh [J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2021, 31(14): 2907.
- [15] BEBENDORF M. A Note on the Poincaré Inequality for Convex Domains [J]. Zeitschrift Für Analysis Und Ihre Anwendungen, 2003, 22(4): 751.
- [16] XIAO Y, XU J, WANG F. High-order Extended Finite Element Methods for Solving Interface Problems [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 364: 112964.
- [17] HE X, LIN T, LIN Y. Immersed Finite Element Methods for Elliptic Interface Problems with Non-homogeneous Jump Conditions [J]. International Journal of Numerical Analysis & Modeling, 2011, 8(2): 284.
- (编辑:温泽宇)